Tutorato Algebra Lineare – 06/03/25

Somma e intersezione di sottospazi vettoriali

V sp. vett. , $W_1, W_2 \subseteq V$ ssp vett.

NOTAZIONE : "ssp" = sottospazio/sottospazi

$$W_1 + W_2 = \{ w_1 + w_2 \in V \cdot w_1 \in W_1 , w_2 \in W_2 \}$$

$\{z_1, \dots, z_r\}$ base di W_1 $\rightsquigarrow$ $W_1 = \mathrm{Span}(z_1, \dots, z_r)$

$\{u_1, \dots, u_s\}$ base di W_2 $\rightsquigarrow$ $W_2 = \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_s)$

$$\rightsquigarrow \quad W_1 + W_2 = \mathrm{Span}(z_1, \dots, z_r, u_1, \dots, u_s)$$

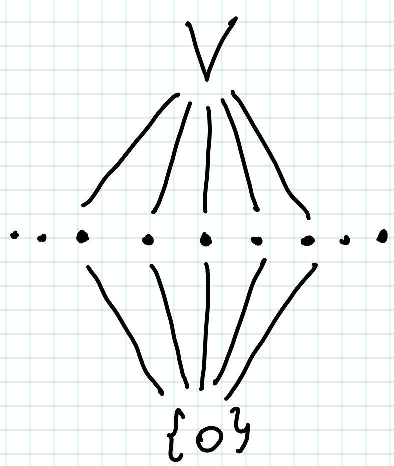
Esempio (dimensione 2)

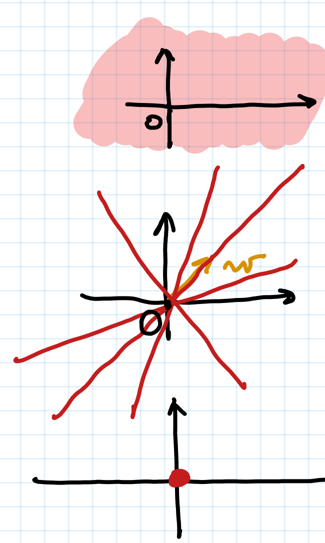
V sp. vett. , $\dim V = 2$

dim 2

dim 1

dim 0





$V = \mathbb{R}^2$

$w \neq 0$

$W = \mathrm{Span}(w)$

$W = \{0\}$

$W_1 = \mathrm{Span}(w_1)$, $W_2 = \mathrm{Span}(w_2)$ ssp di dim. 1

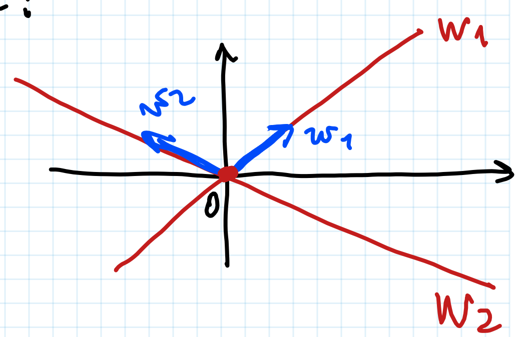
$W_1 \neq W_2$ (cioè w_1, w_2 lin. INDIP.)

$\lambda_1 w_1 = \lambda_2 w_2 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} W_1 \cap W_2 = \{0\} \\ W_1 + W_2 = \mathrm{Span}(w_1, w_2) = V \end{cases}$$

Verifichiamo la formula di Grassmann:

$$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$
$$2 = 1 + 1 - 0$$



<u>Esempio</u> (dimensione 3)

Consideriamo $V = \mathbb{R}^3$

dim 3	Tutto lo spazio	$\mathbb{R}^3$	
dim 2	piani (per l'origine)	$\mathrm{Span}(v_1, v_2)$	$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ lin. indip.
dim 1	rette (per l'origine)	$\mathrm{Span}(v)$	$0 \neq v \in \mathbb{R}^3$
dim 0	punto (origine)	$\{0\}$	

Intuito: due piani passanti per l'origine in $\mathbb{R}^3$ si intersecano in "almeno" una retta

Verifica: $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ ssp di dim. 2

$$\dim(W_1+W_2) = 2 + 2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Ma $W_1 + W_2 \subseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim(W_1+W_2) \leq 3$.

$$\rightsquigarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 4 - \underbrace{\dim(W_1+W_2)}_{\leq 3} \geq 1 .$$

<u>OSS</u>. In dimensione 4, esistono piani (ssp. vett. di dim 2) W_1, W_2 tali che $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

<u>Esempio</u> $V = \mathbb{R}^4$, $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

base canonica

$$\mathbb{R}^4 = \left\{ \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}a\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\b\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\c\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\d\end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \{ a e_1 + b e_2 + c e_3 + d e_4 : a,b,c,d \in \mathbb{R} \}$$

Consideriamo $W_1 = \mathrm{Span}(e_1, e_2) = \left\{ \begin{pmatrix}a\\b\\0\\0\end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}$

$W_2 = \mathrm{Span}(e_3, e_4) = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\c\\d\end{pmatrix} : c,d \in \mathbb{R} \right\}$

$$W_1 + W_2 = \mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3, e_4) = \mathbb{R}^4$$

$$W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

<u>Domanda</u>: perché il sistema seguente rappresenta una retta nello spazio?

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

1) Equazione di un piano (passante per 0) nello spazio

$$ax + by + cz = 0 \quad , \ a, b, c \in \mathbb{R}$$ NON TUTTI NULLI

Perché?

Cerco $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tali che $ax + by + cz = 0$.

Uno tra a, b, c è $\neq 0$. Assumiamo $c \neq 0$. Allora

$$z = -\frac{1}{c}(ax + by).$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\frac{1}{c}(ax+by) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -\frac{a}{c}x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -\frac{b}{c}y \end{pmatrix}$$

$$= x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a/c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -b/c \end{pmatrix}.$$

Cioè $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a/c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -b/c \end{pmatrix} \right\}$.

Viceversa, ogni vettore in ↗ soddisfa l'equazione $ax+by+cz=0$

$(c \neq 0)$

Quindi i vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tali che $ax+by+cz=0$

sono tutti e soli quelli che vivono nel ssp di dim 2

$$W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a/c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -b/c \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

L'equazione $ax+by+cz=0$ è detta un'equazione cartesiana per W.

<u>Esercizio</u> Scrivere un'equazione cartesiana per

$$W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 .$$

<u>Soluzione</u> ("a mano")

$w \in W \implies w = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix}$ per certi $a,b \in \mathbb{R}$

Quindi

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \iff \begin{cases} x = a \\ y = a+b \\ z = b \end{cases}$ per certi $a,b \in \mathbb{R}$ $\iff y = x+z$.

2) Consideriamo ora $\begin{cases} x+2y+z = 0 \\ y+z = 0 \end{cases}$.

Cosa rappresenta?

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=0 \\ z=-y \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x \\ z=-y=x \end{cases}$$

Quindi $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ soddisfa il sistema se e solo se

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Cioè il sistema rappresenta (tramite equaz cartesiane) la retta dello spazio su cui giace il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) Il caso di partenza era $\begin{cases} x+2y+z = 1 \\ y+z = 0 \end{cases}$,

cioè $\begin{cases} y=-x+1 \\ z=-y=x-1 \end{cases}$.

Tutto Traslato

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è soluzione $\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x+1 \\ x-1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$$

NOTAZ. per indicare la retta $\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ traslata del vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

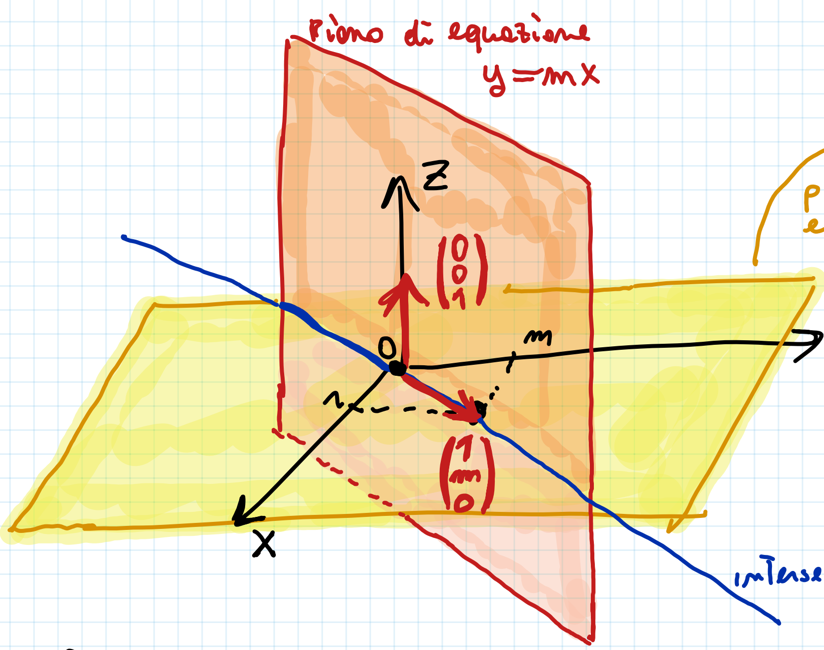
<u>Esempio</u> (retta nel piano vs retta nello spazio)

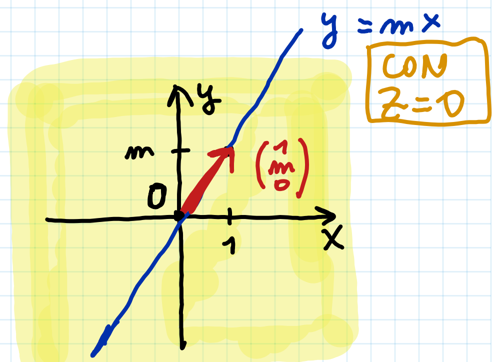
Una retta passante per 0 e non verticale nel piano ha equazione $y = mx$.

Cosa rappresenta questa equazione nello spazio?

Cerco i vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ t.c. $y = mx$, cioè:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ mx \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$





intersezione $= \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, con equazione cartesiana $\begin{cases} y = mx \\ z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = mx \\ z = 0 \end{cases}$ è l'equazione cartesiana nello spazio (!) della retta di eq. $y = mx$ nel piano (!)

APPLICAZIONI LINEARI

V, W spazi vettoriali su $\mathbb{R}$.

oppure "omomorfismo di $\mathbb{R}$-sp. vett"

$f : V \to W$ funzione. f è LINEARE se

- $\forall v_1, v_2 \in V \qquad f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
- $\forall v \in V \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad f(\lambda v) = \lambda f(v)$

f è un ISOMORFISMO se è un'applicazione lineare BIGETTIVA.

$\hookrightarrow$ V ISOMORFO a W: cambio le "etichette" degli elementi, ma la $\underbrace{\text{struttura}}_{\text{di sp vett}}$ è la stessa!

<u>Esempio</u> (in riferimento all'Esercizio 2 del foglio 1)

$$V = Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

Abbiamo visto (vedi Tutorato del 27/02/25) che studiare l'indipendenza lineare di matrici in V equivale a studiare l'indip. lineare di vettori di $\mathbb{R}^4$ tramite l'associazione

$$V \ni \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

In effetti, l'applicazione

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R}^4 \qquad f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{pmatrix}$$

è LINEARE e BIGETTIVA (isomorfismo).

Verifica: Verifico la somma:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in V$$

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_1+a_2 \\ c_1+c_2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b_1+b_2 \\ d_1+d_2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$f(v_1+v_2) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_1+a_2 \\ c_1+c_2 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} b_1+b_2 \\ d_1+d_2 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \\ b_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \\ b_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = f(v_1) + f(v_2)$$

Verificare che $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ per ogni $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

f è bigettiva: verificare che l'inversa è data

da $g: \mathbb{R}^4 \to V$

$$g\left(\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} c \\ d \end{matrix}} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} c \\ d \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

V e $\mathbb{R}^4$ sono ISOMORFI (come $\mathbb{R}$-sp. vettoriali)

Se $f: V_1 \to V_2$ è un isomorfismo, allora vale:

$v_1, \dots, v_r$ lin. indip. in V_1 $\iff$ $f(v_1), \dots, f(v_r)$ lin. indip in V_2

$$\sum_{i=1}^{r} a_i v_i = 0 \iff f\left(\sum_{i=1}^{r} a_i v_i\right) = 0 \quad \text{(f iniettiva)}$$

$$\iff \sum_{i=1}^{r} f(a_i v_i) = 0 \quad \text{(f lineare)}$$

$$\iff \sum_{i=1}^{r} a_i f(v_i) = 0 \quad \text{(f lineare)}$$

Quindi

$v_1, \dots, v_r$ lin. indip. $\iff a_1 = \dots = a_r = 0$

$\iff f(v_1), \dots, f(v_r)$ lin indip.

<u>Domanda</u>: legame tra MATRICI e APPLICAZIONI LINEARI

Richiamo: prodotto matrice vettore (riga per colonna)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}}_{\text{vettore}}$$

Vediamo il legame nel caso di applicazioni

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

(vale lo stesso per $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$).

Consideriamo la matrice A di sopra

$$L_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

Verificare che è lineare!

In realtà, ogni applicazione lineare $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è del tipo L_A per qualche matrice A

<u>Verifica</u>: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ BASE CANONICA

$$v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = f(x_1 e_1) + \dots + f(x_n e_n)$$

F LINEARE

$$= x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)$$

$f(e_1), \dots, f(e_n)$ sono vettori di $\mathbb{R}^n$. Scriviamoli in base $e_1, \dots, e_n$ (cioè scriviamoli come vettori colonna)

$$f(e_1) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{m1}e_m} , \ldots , \quad f(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 f(e_1) + \ldots + x_n f(e_n)$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n} \\ \boxed{a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}}_{\text{vettore di } \mathbb{R}^m} \quad \in \mathbb{R}$$

Detta A la matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, si ha effettivamente

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = L_A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Quindi $f = L_A$.